

01. 수학을 배워야 하는 이유

수학은 왜 배워요? 수학시간이면 한번쯤은 들어보았을 질문입니다. 학생이었을 때 수없이 했던 질문이고 교사가 되고나서 수학시간에 한번쯤은 들었을 질문이지요. 이런 질문에 우리는 어떤 궁색한 대답을 하고 계신가요. 대학에 가야하니까, 수학은 중요한 학문이니까? 이런 대답들이 학생들에게 와 닿을까요? 수학을 왜 배워야하는지 왜 중요한지 모른다면 공부하고 싶은 동기가 생겨나지 않을 것입니다. 왜 중요한지 모른다면 학생들은 수학에 대한 열의 없이 부모나 교사의 강요에 의해 수동적으로 공부하게 됩니다. 그렇다면 수학을 왜 배워야하는가에 대한 이야기를 하기 전에 다른 과목은 왜 배워야하는가를 먼저 생각해볼까요? 보통 학생들은 다른 과목은 왜 배워야하는지 묻지 않습니다. 유독 수학만 물어봅니다. 수학은 왜 배우는지, 사칙연산만 알면 되는데 왜 이런 어려운 함수까지 배워야하는지요. 그런 학생들에게 '다른 과목은 왜 배우는지 안 물어보니?'라는 질문에는 어떤 대답을 할까요? 아마 대부분의 학생들이 자신이 좋아하는 과목이라서 또는 재미있는 과목이라서 라고 대답할 것입니다.

초등학교 학생들은 대부분 체육 과목을 좋아합니다. 체육을 좋아하는 학생은 체육 시간에 체육을 왜 배우냐고 질문하지 않습니다. 재미있고 좋아하는 과목은 왜 배워야하는지 묻지 않습니다. 왜 배워야하는지 묻는다는 것은 그만큼 수학을 학생들이 좋아하지 않는다는 것을 뜻하고 우리의 수학교육이 잘못된 방향으로 가고 있다는 것을 의미하는 것은 아닐까요. 진정 고민해야 하는 것은 학생들이 어떻게 재미있고 즐겁게 수학을 공부하느냐인데요. 사실 사회든 수학이든 예체능교과든 공부하는 이유는 똑같습니다. 체육을 가르치는 목표는 생활에 필요한 최소한의 체력과 체육지식을 길러주기 위해서입니다. 학생들을 운동선수로 만들기 위해서가 아닙니다. 학교에서 음악과 미술을 가르치는 이유 역시 인간으로서 사회생활을 하는데 필요한 최소한의 음악적, 미술적 소양을 길러주기 위함입니다. 음악가, 미술가로 만드는 것이 목표가 아닙니다. 전체 학생 중 체육이나 음악, 미술을 전공하는 학생의 비율이 얼마가 될까요? 얼마 되지 않습니다. 하지만 나라에서는 모든 학생들에게 예체능 과목들을 다 가르칩니다.

수학도 마찬가지겠죠. 수학자를 만들기 위해 수학을 가르치는 것은 아닙니다. 수학에서 배운 내용이 모두 실생활에 쓰이는 것도 아닙니다. 수학은 그보다 더 큰 수학적 사고력, 생각하는 힘 기르기를 목표로 하고 있습니다. 수학적 사고력이라고 하면 계산력과 논리력이라고 오해하기 쉬운데요. 그동안 학교에서는 학생들에게 빠르고 정확하게 풀어내는 계산력을 계속 강조했기 때문인지도 모릅니다. 하지만 실제 사회에 나가서 만나게 되는 다양한 상황들 속에서 필요한 것은 오히려 계산력 보다는 상황을 판단하고 예측하고 논리적으로 생각하는 힘입니다. 즉 수학적 사고력이란 간단하게는 생각하는 힘을 말하며 더 깊게는 현상을 파악하고 예측하며, 논리적으로 추론하고 유기적인 관계를 파악하는 힘을 말합니다.

예를 들어 어떤 문제가 발생했을 경우 사람은 보통 문제 상황을 인식하고, 다음에는 그 문

제가 어떤 문제인지 이해하는 단계로 사고가 확장됩니다. 그리고 나서 문제를 어떤 방법으로 해결할 것인지를 고민하겠죠. 문제를 해결하는 과정에서 또한 다양한 방법들을 고민해내고 시도해보면서 많은 사고를 합니다. 그리고 문제를 해결했으면 문제가 앞으로 다시 일어나지 않도록 예측하고 방지하려고 합니다. 이러한 일련의 단계적 과정 역시 수학적 사고라고 할 수 있습니다. 수학적 사고는 위의 단계적 과정에서처럼 자연스럽게 추상적 사고로 이어집니다. 이 추상적 사고력은 어떤 문제가 벌어지면 그것과 연관된 다른 문제가 발생할 수 있다는 것을 예측할 수 있게 합니다. 이러한 예측이 가능하면 사회에서 살아가는데 있어 어떤 문제 상황을 만나도 헤쳐 나갈 수 있는 힘이 되겠죠?

미국의 워싱턴포스트지는 하버드대 하워드 가드너 교수의 저서 '미래를 위한 다섯 가지 생각'을 인용하여 '10년 후에도 살아남는 직업 고르기 노하우'를 공개했습니다. 그 책에 따르면 미래에 살아남을 직업은 로봇이 대신하기에는 어려운 직업 즉 사교적이거나 형이상학적인 직업들입니다. 또한 살아남기 위해서는 아이디어를 조합할 수 있는 능력과 창조적이고 종합적인 사고방식을 가져야하며, 매일 쏟아지는 엄청난 정보를 판가름할 수 있는 정보처리능력도 필요하다고 덧붙였습니다. 미래에 살아남을 직업으로 회계사와 법률가, 의사, 변호사, 약사, 교사, 목사, 벽돌공 등이 선정되었는데요. 이 직업들은 생각하는 기술이 필요해 미래에도 필요하다고 여겨집니다. 단순 노동과 간단한 사고능력이 필요한 직업들은 점점 사라지거나 기계가 대신하고 있습니다. 이제는 전문적인 사고와 복합적인 의사소통 등 더 높은 수준의 지식과 응용능력이 필요한 직업만이 미래에 살아남게 될 것입니다. 지금 학교에서 공부하는 학생들이 사회에 진출하여 가지게 될 직업들이며 이 학생들에게 필요한 능력이 바로 생각하는 힘, 수학적 사고력이 아닐까요? 학생들에게는 끊임없이 변화하는 미래사회를 대비하여 다양한 상황 속에서도 의연하게 대처할 수 있는 추상적 사고력과 미래를 예측할 수 있는 추론 능력 등을 크게 아우르는 수학적 사고력이 절실하게 필요합니다.

교사로서 학생들에게 해줄 수 있는 최고의 선물이 바로 이러한 사고력을 키워주는 것입니다. 수학은 인간의 뇌를 단련하여 사고력을 키워주는 최고의 과목입니다. 사고력은 공부 뿐 아니라 우리의 삶 모든 과정에 적용됩니다. 이러한 사고력은 삶의 고비에서 올바른 판단을 내릴 수 있게 합니다. 사회의 어떤 변화에도 적응해 나가는 힘을 키워주는 것입니다.

02. 수학과에서 질문의 중요성

$1+1=2$ 라는 식에 우리나라 사람은 어느 누구도 이의를 제기하지 않습니다. 하지만 왜 $1+1=2$ 인가라는 질문에 2박 3일을 토론할 수 있는 민족이 있습니다. 바로 유대인들이지요. 무엇이 주어지든 일단 왜 그런지, 과연 그렇게 되는 건지, 그렇게 된다면 어떤 원리로 그렇게 되는 건지 끊임없이 질문을 던지고 탐구합니다. $1+1=2$ 는 단순히 양의 개념으로만 본다면 왜 2인지에 대해서 설명하는 것 자체가 무의미할지 모릅니다. 하지만 과연 1이 뜻하는 의미가 호랑이 한 마리와 책 1권이라면 2라고 할 수 있을까요? 같은 종류의 양이 아니면 덧셈을 할 수 없다는 것에 대해 학교에서는 가르쳐주지 않습니다. 동물로 생각해보더라도 호랑이 1마리와 토끼 1마리를 더한다면 2마리가 될 수 있을까요? 학생들에게 이 질문을 던져보았습니다. 학생들의 대답이

어땠을까요? 호랑이가 토끼를 잡아먹기 때문에 1마리가 된다는 학생이 있는가 하면 호랑이가 배가 부를 때는 작은 동물을 잡아먹지 않기 때문에 2마리가 된다는 학생부터 생각지 못한 재미있는 이야기들이 나옵니다. 어떨까요. 황당한 말장난일 뿐일까요? 주어지는 어떤 문제나 상황 이든 그대로 받아들이는 것이 아니라 한번 더 생각해보는 것이 중요하지 않은지요.

수학은 어느 순간부터 학생들에게 공식을 외우고 그 공식에 대입하여 문제를 푸는 과목이 되어버린 것 같습니다. 그런 학생들에게 수학시간 질문이란 필요하지 않겠지요? 그래서 수학이라고 하면 지루하고 재미없다고 생각하는 학생들이 더 많은 것 같습니다. 분수의 덧셈을 배울 때에도 '분모가 같으면 분자끼리 더한다.'라는 공식을 외우고 연관된 분수 문제를 푸는 것이 수학이라고 생각합니다. 이런 학생들에게 왜 분자끼리만 더하느냐고 물어보면 대부분 대답을 명확하게 못합니다. 그 학생들이 대답할 수 있는 것이라고는 '학원에서 배웠다.'가 다이죠. 왜 이렇게 풀어야하는지 어떻게 이런 답이 나왔는지라는 질문은 그저 귀찮을 뿐입니다. '빨리 답이나 알려주세요.'가 학생들 대부분의 반응입니다.

이런 학생들에게 먼저 수학이란 과목에 대해 함께 생각해볼 시간부터 가져보는 것은 어떨까요? 수학이란 단순히 공식을 외워서 복잡한 문제를 푸는 과목이 아닙니다. 수학은 사실 우리 생활 곳곳에 볼 수 있습니다. 수학이 우리 곁에 너무 가까이 있기에 오히려 더 느끼지 못하며 살아갑니다. 우리가 인지하지 못할 뿐 수학이 없는 곳은 없습니다.

우리가 살고 있는 지구, 그리고 우리의 인체 자체가 수학적입니다. 하나의 예를 들어볼까요? 우리가 숨을 쉴 수 있게 도와주는 허파 속에는 기관지와 기관지에서 갈라져 나온 작은 가지인 세기관지들이 있습니다. 이 기관지와 세기관지는 산소를 가장 많이 받아들일 수 있도록 프랙탈 구조로 되어있습니다. 프랙탈은 작은 구조가 전체 구조와 비슷한 형태로 끝없이 되풀이 되는 구조를 말합니다. 우리 몸의 허파 속 기관지 구조 뿐 아니라 혈관도 마찬가지입니다. 고사리와 같은 양치류 식물, 번개의 꺾적, 아름다운 눈송이의 구조, 우주의 신비스런 모습, 인체의 혈관과 신경조직, 너울이 밀려오는 해안선의 모습 등과 같이 우리 주변의 많은 것들에서도 프랙탈 구조는 쉽게 발견됩니다.

우리의 생활을 한번 볼까요? 하루는 24시간이며 1시간은 60분이라는 기본적인 계산하에 생활을 시작합니다. 출근 시간이 되면 집을 나서고 점심시간이 되면 밥을 먹습니다. 조금만 길을 나서도 보이는 길가의 가로수들 또한 나무 위로 쏟아지는 햇빛을 조금이라도 낭비하지 않고 광합성에 이용할 수 있도록 나뭇잎이 빈틈없이 나무 전체를 뒤덮고 있습니다. 나뭇잎이 이렇게 나무 전체를 뒤덮기 위해서는 나무의 잔가지들이 모든 방향으로 골고루 향해야 합니다. 복잡하게 얽힌 나뭇가지를 보면 나뭇가지의 기하학적 구조가 매우 복잡할 것이라 생각되지만 사실 나뭇가지의 구조는 매우 간단한 규칙으로 이루어져 있습니다. 일정한 길이가 될 때마다 일정한 각도로 두 개의 가지로 갈라지는 간단한 규칙만으로도 모든 방향으로 뻗은 나뭇가지의 구조를 만들어 낼 수가 있습니다. 이러한 나뭇가지 뿐 아니라 꽃잎의 배열 또한 여러 가지 수열에 의해 규칙적으로 배열되어있습니다. 직장에서 받는 연봉, 매달 붙고 있는 보험이나 적금 등은 모두가 철저하게 수학적으로 계산되고 있습니다. 우리가 단지 인식하지 못할 뿐 수학은 모든 일상생활 곳곳에 숨어있습니다.

이처럼 수학이란 우리를 둘러싼 세상 속에서 존재하는 다양한 순서와 패턴을 찾아내는 학문

이며, 우리의 일상생활 속에서 비교하고, 분류하고 측정하는 모든 활동을 포함하고 있습니다. 수학은 앞으로 사회가 더 발달해가면서 필요한 학문이 될 것입니다. 정보의 홍수라고도 불릴 만큼 넘쳐나는 정보 속에서 단순히 정보를 외우는 것이 아닌 자신에게 필요한 정보를 검색하고 수집한 뒤 분석하여 자신에게 필요한 자료를 만들어나가는 것이 요구되고 있습니다. 이러한 것은 수학적 사고력이 바탕이 되어야 가능한 것입니다.

수학적 사고력은 교사가 만들어 줄 수 있는 것이 아닙니다. 수많은 문제들을 접하고 다양한 수학적 상황 속에서 학생들이 생각할 수 있는 여건을 마련해주어야 합니다. 학생들 스스로 답을 찾아갈 수 있도록 이끌어 주어야 합니다. 그 핵심방법이 바로 질문이구요. 학생 스스로 문제를 해결하는 방법을 찾아갈 수 있도록 기회를 제공해주고 방향을 잡아주는 것이 필요합니다.

질문에도 전략이 필요합니다. 예, 아니오나 단답형 질문으로 시작하세요. 처음부터 너무 어려운 질문을 하게 되면 대부분의 학생들은 바로 포기합니다. 수위를 낮추고 단답형에서 나아가 부분적인 답을 할 수 있게 하고 점차 확장해가도록 합니다. 학생들이 좀 익숙해지면 핵심을 파악하고 개념을 잡을 수 있는 질문을 하세요.

“여기에서 가장 중요한 단어는 뭘까? 왜 그렇게 생각해?”

“이 문제에서 우리가 알아야할 중요한 개념은 뭘까?”

질문을 하고 나면 학생이 나름의 대답을 할 겁니다. 그 대답에 대한 교사의 반응도 중요합니다. 학생의 대답이 교사의 기대수준에 비해 무척 낮을 수도 있습니다. 어떤 대답이든 수용해주고 들어주어야 합니다.

“그래. 그렇게 생각할 수도 있겠다.”

“재밌는 생각이구나.”

이런 반응에서 더해서 하나만 더 추가해서 물어봐주세요.

“그런데 어떻게 그런 생각을 했어?”

학생 나름의 논리가 나옵니다. 이때 학생의 창의성이 더 빛을 발하게 되겠죠? 학생의 대답이 틀렸다고 바로 정정해주고 답을 가르쳐주지 마세요. 교사의 직업병이기도 하지요. 바로 답을 주고 싶어 합니다. 하지만 중요한 것은 학생 스스로 생각해내도록 해야 합니다.

“그렇게 생각했구나. 그럼 이건 어떤 관련이 있을까?”

“이렇게 생각해보는 건 어때?”

한 단계 더 올라갈 수 있도록 길을 열어주는 정도로만 해주세요. 학생 스스로 해결할 수 있도록이요. 만약 학생 스스로 문제를 해결했다면 교사의 도움보다 스스로의 힘으로 해내었다는 것을 강조해주세요.

“선생님이 가르쳐주지도 않았는데 스스로 문제를 해결했구나.”

“막상 풀어보니 재밌지?” 정도면 됩니다.

“대단해.”, “천천데?”, “네가 너무 자랑스럽다.” 등의 칭찬은 하지마세요. 칭찬의 역효과에 대해서 많이 알려졌겠지만 과도한 칭찬은 학생 스스로 자부심을 느끼게 하는 내적동기를 향상시키기보다는 교사의 인정이 더 중요한 외적동기를 부각시키게 됩니다. 스스로 문제를 해결하면서 느끼

는 짜릿함을 한번 맛보게 되면 학생들은 더 어려운 문제를 만나면 바로 답을 확인하기보다 스스로 문제를 해결하려 노력하게 됩니다. 이제부터 수학의 재미를 느끼게 되는거지요. 이 모습이야 말로 부모와 교사 모두가 꿈꾸고 바라던 모습 아닐까요?

03 수학의 개념 정리하기

수학은 개념이 중요합니다. 개념이란 크게 '정의'와 '정리'로 구분할 수 있습니다. '정의'란 수학 용어의 약속을 의미합니다. 새로운 용어가 등장하면 그 뜻을 나만의 방법으로 설명하고 이해하여 내 것으로 만들어야합니다. 그리고 그 용어에 대한 구체적인 예를 하나정도 들 수 있으면 좋습니다. '정리'란 단순한 약속이 아니라 정의에서 유도된 성질이나 공식, 법칙 등을 의미합니다. '비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱은 같다', '분모가 같은 진분수의 덧셈은 분자끼리의 합으로 계산한다.' 등이 있습니다.

특히나 수학에는 용어가 참 많이 나옵니다. 분수, 소수, 미분, 적분..... 먼저 용어에 대한 이해가 우선이 되어야합니다. 수학에 나오는 용어는 한자로 되어있습니다. 분수(分數)는 나눌 분, 셈 수로 된 한자어로 '전체에 대한 부분을 나타내는 수, 전체에 대한 일부분을 나타내는 수'라는 것을 이해하고 정리하는 것으로 공부를 시작해야합니다.

용어에 대해 완벽히 이해하기 위해서는 질문만큼 좋은 것도 없습니다. 앞에서 분수를 '전체에 대한 부분을 나타내는 수'라고 정의 내렸습니다. 그렇다면 분수에 대해서 질문을 만들어볼까요?

- 분수란 뭘까?
- 분수에서 전체란 뭘고 부분이란 뭘까?
- 분자는 뭘까?
- 분모는 뭘까?
- 단위분수는 뭘까?

실제로 안다고 생각했지만 막상 질문을 만들어보고 설명해보려고 하면 되지 않습니다. 이것이야말로 '안다고 착각하고 있지만 실제로는 모르고 있는 나'의 민낯을 제대로 만나게 되는 방법입니다.

수학 용어들은 일본인들이 쓰던 방식의 한자로 만든 것을 그대로 가져왔기 때문에 우리나라 학생들이 이해하기에는 어려움이 있습니다. 질문을 통해 용어에 대해 자신만의 말로 이해하고 자기 것으로 만드는 과정이 꼭 필요합니다. 용어를 충분히 이해해야 문제를 정확하게 이해할 수 있기 때문입니다. 시중에 수학용어사전이나 수학개념사전이 잘 나와 있습니다. 많은 문제를 푸는 것보다 우선적으로 수학용어나 개념을 파악하는데 힘을 써야합니다.

개념을 알아야 된다고 해서 모든 공식이나 법칙을 다 외워야 된다는 말은 아닙니다. 공식이나 법칙 중에서도 핵심개념이 있습니다. 핵심개념만 확실하게 이해한다면 수많은 공식을 외울 필요가 없습니다. 예를 들어볼까요?

분수를 배울 때 위에서처럼 먼저 용어에 대한 나만의 이해가 필요합니다. 용어에 대한 이해가 충분히 되고 나면 분수에 나오는 공식에 대해서 알아야겠죠? 학생들이 분수를 배울 때면

분수의 공식이 너무 많다고 불평하곤 합니다. 하지만 분수에서는 한가지 개념밖에 없습니다. 이 핵심개념은 바로 단위분수입니다. 단위분수에 대한 확실한 이해만 되면 다른 공식이 필요 없습니다. 이를 도와주는 것이 바로 질문입니다. ‘두 개의 분수의 크기를 비교할 때는 분모가 같으면 분자끼리 비교한다.’는 분수의 성질에 대해 배울 때도 단순히 외우기보다 한번 더 생각해봅시다. 왜 분수의 크기를 비교할 때 분모가 같으면 분자끼리 비교할까? 이런 질문에 대한 답을 생각하다보면 자연스럽게 분수의 핵심개념인 단위분수에 대해 생각하지 않을 수 가 없습니다. 2 와 $\frac{3}{5}$ 의 크기를 비교한다고 할 때 $\frac{2}{5}$ 는 단위분수인 $\frac{1}{5}$ 이 두 개이고 $\frac{3}{5}$ 은 단위분수인 $\frac{1}{5}$ 이 세 개이므로 $\frac{3}{5}$ 이 더 큼니다. 이런 식으로 한번 더 ‘왜’라는 질문을 떠올려본다면 핵심개념에 대해 알아갈 수밖에 없습니다. 핵심개념에 대해 확실히 이해가 된다면 분수의 덧셈에서도 ‘진 분수의 덧셈에서 분모가 같으면 분자끼리 더한다.’라는 말도 굳이 할 필요가 없습니다. 단위분수의 개념이 확실하다면 $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ 각각 $\frac{1}{7}$ 이 두 개, $\frac{1}{7}$ 이 세 개니까 더하면 $\frac{1}{7}$ 이 5개, 그래서 $\frac{5}{7}$ 가 되는 거지 분자끼리 더해서 $\frac{5}{7}$ 가 되는 게 아니라는 겁니다. 단위분수에 대한 핵심개념만 확실하게 알고 그 핵심개념으로 전체 분수 단원을 끌어가야합니다. 이것을 도와주는 것이 바로 ‘왜’라는 질문입니다. 핵심개념에 대한 이해가 확실하다면 더 어려운 공식이 나와도 이해할 수 있고 문제를 해결할 수 있습니다. 이것이 안 되면 단순히 공식을 외우고 그 공식을 대입해서 문제를 푸는 연산훈련밖에 안됩니다. 연산훈련만 반복하면 생각을 해내야 되는 서술식 문제나 수준 높은 문제에는 손을 들게 될 수 밖에 없습니다. 사회에 나와서도 마찬가지입니다. 빨리 문제를 풀어내는 훈련만 반복하게 되면 문제 상황을 빨리 해결하기 위한 요령만 익히게 됩니다. 요령만 익히게 되면 많은 작업들을 빠르게 처리할 수는 있겠지만 그 이상의 일은 못하지 않을까요? ‘왜’라는 질문은 본질을 찾아가는 질문입니다. 왜 그렇게 되는지를 정확하게 이해한다면 본질을 파악했기 때문에 응용이 가능하고 더 효율적인 방법을 찾을 수 있습니다.

또한, 모든 수학개념은 서로 연결되어 있습니다. 어느 한 개념을 확실히 이해하면 다른 개념에 대한 이해가 훨씬 빨라집니다. 꼬리에 꼬리를 물고 학습이 일어나게 된다는 말입니다. 초등학교에서 비와 비율의 개념을 정확히 이해하였다면 중학교에 가서 닮음비를 쉽게 이해할 것입니다. 그럼 고등학교 삼각함수 역시 큰 어려움 없이 받아들일 수 있습니다. 고등학교 삼각함수는 중학교 3학년의 삼각비 개념을 확장한 것입니다. 그런데 삼각비와 삼각함수는 닮은 직각삼각형에서 출발합니다. 닮음은 중학교 2학년에서 다루는 개념입니다. 그런데 또 이것은 ‘닮은 직각삼각형에서는 빗변과 밑변과 높이 사이의 길이의 비가 일정하다.’는 초등학교 비의 성질로부터 이어집니다. 초등학교에서 고등학교까지 수학은 연결되어 있습니다. 그러니 초등학교 수학개념을 제대로 이해하면 고등학교까지 수학을 이해하는 것이 수월해질 수 밖에 없습니다.