

01. 다양한 활동으로 시작하는 수학 수업

1) 튼튼한 기둥 만들기

- ▶ 6-나. 3. 원기둥, 원뿔, 구(2/11)
- ▶ 학습목표: 원기둥에 대해 알아보자.
- ▶ 수업내용

선생님: 선생님이 여러분에게 미션을 내겠어요. 여기 A4용지와 테이프를 준비했습니다. 여러분이 기둥모양을 만들어서 어느 모듬이 제일 많은 책을 그 위에 올리는지 해보도록 하겠습니다.

학생 1: 기둥모양은 무엇이든 괜찮나요?

선생님: 네. 어떤 모양의 기둥도 괜찮습니다. 제일 많은 책을 올릴 수 있는 모듬을 찾아볼게요.
(활동이 끝난 후)

선생님: 어느 모듬이 가장 많은 책을 올릴 수 있었나요?

학생 2: 1모듬이요.

선생님: 1모듬의 기둥모양은 원이었어요. 둥근모양의 기둥이 다른 기둥보다 더 튼튼한 이유는 무엇일까요?

학생 3: 음. 원의 모양이 둥글어서요.

선생님: 더 이야기해볼래?

학생 3: 각기둥과 원기둥의 차이는 중심에서 옆면과의 거리인 것 같아요. 원기둥은 중심과 옆면과의 거리가 일정하잖아요.

선생님: 네. 원기둥과 달리 각기둥은 중심에서 옆면과의 거리가 일정하지 않아서 약한 부분이 생겨요. 실험해보니 각기둥은 무너지는 부분이 발생하거든요. 이처럼 기둥은 모양에 따라 강도와 튼튼함이 달라집니다. 또한 실제로 같은 양의 재료로 만들어진 속이 짝 찬 원기둥보다 속이 빈 원통이 더 강합니다. 대나무 줄기는 자체의 무게에 의해 쓰러지지 않고 37m까지 자랄 수 있어요. 코끼리와 30톤 이상의 무게가 나가는 브론토사우루스의 다리뼈도 속이 빈 원통 모양입니다. 이제는 원기둥에 대해서 더 공부해볼까요?

<미술과 연계하기>

- 다양한 기둥을 이용하여 건축물 만들기(교과서 마다 다를 수 있음)

<체육과 연계하기>

- 다양한 공놀이하기: 구슬치기, 짐볼 피구

2) 색종이로 큰 원 만들기

▶ 관련단원: 2학년 1학기 2. 여러 가지도형

3학년 2학기 3. 원

6학년 1학기 5. 원의 넓이

▶ 색종이로 몸이 통과될 수 있는 큰 원 만들기

준비물: 색종이, 가위

1. 색종이를 반으로 접는다.
2. 접힌 색종이를 가위로 자른다. 접힌 선에서 시작하여 다 자르지 않고 끝에 0.5cm정도 남긴다.
3. 두 번째에는 반대편에서 가위질을 한다. 이번에도 끝에 0.5cm는 자르지 않고 남긴다.
4. 이렇게 번갈아 가며 색종이를 전부 자른다. 단, 자른 선의 개수는 홀수여야 한다. 자른 선의 간격이 가까울수록 더 많이 자를 수 있고 만들 원도 더 커진다.
5. 색종이를 펼친 뒤 몸을 통과시켜본다.

▶ 수업내용

선생님: 선생님이 수업을 시작하기 전에 이야기를 하나 들려줄게요.

< 그리스 신화에 나오는 디도 공주 이야기 >

디도 공주는 오빠 피그말리온이 자신의 남편을 죽이자 충성스러운 신하들과 함께 아프리카의 바닷가까지 도망을 갔습니다. 공주는 새 도시를 건설할 수 있도록 지방 영주에게 땅을 팔라고 했어요. 하지만 영주가 단번에 거절하자 공주는 “황소 가죽 한 장으로 둘러쌀 수 있을 정도의 땅만 파시오.”라고 영주를 설득했고, 영주가 찬성하자 공주는 황소 가죽을 아주 가는 끈으로 잘라 다시 그 끈을 이어 아주 긴 가죽고리를 만들었습니다. 이렇게 산 땅에 ‘카르타고’라는 새 도시를 만들었습니다.

선생님: 디도 공주가 가죽 고리로 만든 모양은 바로 원이었습니다. 그런데 어떻게 황소가죽 한 장으로 둘러싼 땅이 도시를 만들 정도로 컸을까요?

학생 1: 긴면으로 얇게 잘라서 묶어서 큰 원을 만들어요.

학생 2: 달팽이 모양처럼 잘라서 묶어요.

선생님: 다양한 의견들이 나오는군요. 그럼 선생님이 여러분에게 색종이를 나눠줄게요. 색종이를 잘라서 우리 몸이 통과할 수 있을만큼의 큰 원을 만들어보세요.

3) 삼각형의 힘 알아보기

▶ 관련단원: 2학년 1학기 2. 여러 가지도형

3학년 1학기 2. 평면도형

4학년 1학기 3. 각도와 삼각형

5학년 1학기 5. 다각형의 넓이

▶ 종이로 튼튼한 다리 만들기

준비물: A4 종이, 상자2, 동전이나 바둑알 또는 얇은 책

1. 종이를 부채 모양으로 접는다.
2. 두 상자 위에 종이를 올려놓아 다리를 만든다.
3. 종이 다리 위에 얇은 책을 올려놓아 다리가 얼마나 강한지 알아본다. 다리가 무너질 때까지 계속 책을 올린다.

▶ 수업내용

선생님: A4종이로 다리를 만든다면 그 위에 책을 올릴 수 있을까요?

학생 1: 불가능해요!! 종이잖아요.

학생 2: 접으면 가능할 것 같기도 해요.

선생님: 접는 방법 외에 다른 방법은 없을까요?

학생 3: 음..말아볼수도 있어요.

선생님: 그럼 여러분에게 A4종이를 나눠주겠습니다. 다리를 한번 만들어보고 책상과 책상사이
에 놓고 몇권의 책이 올라가는지 한번 확인해보세요.

(활동 후)

선생님: 어느 모듬이 가장 많은 책을 올릴 수 있었죠?

학생 4: 1모듬이요 부채처럼 접었어요.

선생님: 부채를 만들 때처럼 접은 다리를 옆에서 보면 삼각형 모양이 보이죠? 종이를 삼각형
모양으로 접어준 것만으로 300배 이상 강해진다고 합니다. 삼각형 주름은 종이를 강하
게 만들어 주기 때문에 생활용품에 많이 이용됩니다. 종이상자를 잘라보면 두 종이 사
이에 삼각형으로 접힌 종이가 들어 있어요. 우리가 알고 있는 유명한 에펠탑도 삼각형
구조로 튼튼하게 연결되어 있구요. 기차가 지나다니는 다리들도 대부분 삼각형 구조로
설계되어 있답니다. 그럼 삼각형 모양 외에 어느 모듬의 다리 모양이 인상적이었나요?

학생 5: 3모듬이요. 잘라서 2개의 원기둥을 만들었어요.

선생님: 선생님은 삼각형모양으로 접은 다리를 답으로 준비했지만 3모듬도 훌륭했어요. 선생
님은 여러분에게 자르지 말라는 말을 하지 않았어요. 그죠? 3모듬 외에는 자를 생각을
하지 않았네요. 3모듬만 잘라서 2개의 원기둥을 만들었어요. 하지만 아쉽게도 책을 많
이 올리지는 못했네요. 하지만 좋은 아이디어였어요.

▶ 수업 팁

학생들은 한 모듬의 좋은 아이디어를 보고 자연스럽게 따라하게 됩니다. 한 모듬이 먼저 삼각
형 주름으로 만들면 더 이상 생각하지 않고 크기만 다른 삼각형 모양의 다리를 다 만들지요.
이왕이면 다른 모듬이 만드는 과정을 보지 않고 할 수 있는 장치가 필요합니다. 자신의 모듬만
의 아이디어가 나오도록이요. 또한 교사가 의도한 대로 삼각형 주름으로 만들기도 하지만 다른
모양이 나올 수도 있습니다. 뭐 어떤가요. 그 나름의 학생들의 아이디어들을 다 받아주세요. 이
활동을 하면서 궁금한 것들이 나면 그 궁금한 것들을 다 들어줍니다. 그러면서 진행이 잘 되지
않는 모듬이 있으면 학생들의 생각을 넓힐 수 있도록 질문을 해봅니다.

- 꼭 한 장으로 해야 할까?
- 다른 모양으로 만들 수는 없을까?
- 어떤 모양이 가장 튼튼할까?
- 접어볼까 말아볼까?

학생들이 실제로 해보고 시행착오를 겪어나가면서 논리적인 사고가 확장되고 창의적인 사고가 가능하게 됩니다. 그리고 친구들과 이야기를 주고받고 의논하면서 의사소통능력도 기를 수 있게 되구요.

<미술, 과학과 연계하기>

과학프로젝트-종이비행기 날리기

학생들에게 모두 프로젝트로 종이비행기 만들기를 할 수도 있습니다. 미술시간에 종이비행기를 만들고 과학 시간을 이용하여 종이비행기 실험을 합니다. 어떻게 접어야 멀리날 수 있을 지를요. 바람의 저항, 무게 등까지 다 고려해야 가능하죠. 앞부분을 얼마나 무겁게 해야 할지, 날개는 어느 정도의 넓이면 적당할지.. 학생들은 친구들과 다양한 아이디어를 나누며 의논하는 과정에서 이 간단한 실험으로 많은 것들을 배워나갑니다.

02. 문제해결 4단계와 질문으로 연결하기

수학적 사고력을 높일 수 있는 방법으로 헝가리의 유명한 수학자 폴리아의 문제해결4단계를 많이들 이야기 합니다. 각 단계마다 던질 수 있는 질문들로 학생들이 수학적 사고를 할 수 있도록 해줍니다. 이 질문에 익숙해지면 학생들은 스스로도 문제를 해결할 때 이 단계를 거쳐 혼자 힘으로 문제를 해결해 나갈 수 있게 됩니다. 각 단계별 어떤 질문들로 연결시킬 수 있는지 알아볼까요?

폴리아의 문제해결 4단계-질문과 연결하기

1단계: 문제 이해하기

문제를 낸 출제자의 마음을 읽어보는 단계라고 할 수 있습니다. 문제를 자신의 말로 읽고 이해할 수 있어야합니다. 아는 것 같아도 자신의 말로 읽어내면 이해가 안 되고 있는 부분이 보입니다. 문제 풀이에 익숙하지 않은 저학년인 경우는 주어진 조건과 구하고자 하는 것에 줄을 그어서 표시하도록 합니다.

- 자신의 말 즉 쉬운 말로 문제를 읽고 말해볼 수 있나요?
- 문제에서 주어진 조건은 무엇인가요?
- 주어진 조건들 사이에 연관성을 찾을 수 있나요?
- 문제에서 구하고자 하는 것은 무엇인가요?
- 주어진 조건만으로 문제를 해결할 수 있나요?

- 무엇을 가지고 무엇을 어떻게 해야 할지를 결정하기 위해 그림이나 표를 그릴 수 있나요?

2단계: 문제 풀이 계획하기

문제를 해결하기 위해 계획하는 단계입니다. 전형적인 문제일 때는 수학적 기호를 사용하거나, 식으로 나타내기, 그림으로 시각화하기의 방법을 이용하고, 전형적이지 않은 문제일 때에는 문제의 특성을 반영하여 특수한 전략을 구상해야 합니다. 문제를 푸는 과정이 아니라 문제 해결을 위해 핵심이 무엇인가를 찾아가는 전략이므로 다양한 방법을 생각하고, 구체적으로 길게 써보도록 해도 됩니다.

- 전에 풀었던 문제인가요?
- 비슷한 문제를 푼 경험이 떠오른다면 그때 어떤 전략을 사용했나요?
- 경험하지 않았던 문제라면 문제 해결에서 이용될 수 있는 전략은 무엇인가요?
- 자료는 모두 다 사용했나요, 조건은 모두 다 사용했나요?
- 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했나요?
- 어떻게 식을 세울지 계획해 보세요.

3단계: 문제 풀이 실행하기

계획을 수립하는 것과 실행하는 것을 명백하게 구분하기란 어렵지만 계획된 전략을 따라서 실제로 활동해 보거나 자료를 조작해보면서 그림을 그려보거나 식을 풀이해가면서 해답에 접근하는 과정입니다. 또한 두 세 단계의 과정을 걸쳐서 해결해야 할 문제일 경우 단계별로 올바르게 실행했는지 점검해보고 어떤 규칙이 보이는지 확인해 보도록 합니다.

계획을 실행하는 과정에서 전략을 수정하거나 변경할 수 있으며 여러 번의 시행착오를 겪을 수 있기 때문에 학생들의 집중력과 끈기가 가장 많이 요구됩니다. 그러므로 서로 의사소통할 수 있는 기회를 많이 제공하여 아이디어를 공유하고 잘못된 부분을 스스로 발견하고 교정할 수 있도록 합니다.

- 풀이 과정은 체계적으로 잘 되고 있는가요?
- 풀이 단계는 올바른가요?
- 내가 놓치고 있는 부분은 없나요?
- 답은 무엇이라고 예상하나요?

4단계: 문제 해결 반성하기

문제를 해결하는 과정 즉, 풀이를 하는 과정이 정당한지 확인하고 문제에 대한 이해를 발전시키며 학습에 가치와 희열을 느끼도록 합니다. 부분적으로 실수한 부분을 찾아내거나 전체적으로 풀이 과정을 다시 확인해보면서 새로운 풀이 방법을 찾아낼 수 있습니다. 또한 다른 주제와의 관련성을 찾아낼 수 도 있으므로 더 나은 문제 해결에 도움을 주고 그 문제 해결이 적절한지 알 수 있게 해줍니다.

반성의 단계는 답이 바른지 확인하는 것도 중요하지만 문제해결과정에서 작용한 사고를 확장시켜 주는 기회를 갖게 하는 문제해결력의 신장에 매우 유익하다고 할 수 있습니다.

- 해결과정에서 잘못 생각하거나 잘못 계산한 곳은 없나요?
- 또 다른 전략이나 풀이방법은 없나요?
- 풀이 하는 과정에서 발견한 원리나 법칙을 증명할 수 있나요?
- 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있나요?

폴리아의 문제해결 4단계는 각 단계를 정확히 구분하지 않아도 교사의 질문만으로도 단계와 연결하여 학생들의 사고력을 신장시킬 수 있습니다. 수업을 시작하고 문제를 제시할 때 학생들에게 “오늘 배운 수학은 지난시간에 배운 문제랑 어떤 부분이 비슷하니?”, “예전에 이런 문제 푸는 방법, 이런 개념들 어디서 배웠더라?”라고 오늘 배운 부분과 예전에 배운 부분을 연결하는 활동으로 학생들의 뇌를 깨웁니다.

문제를 풀고 나면 중요한 것이 하나 남습니다. 바로 실생활과의 연결입니다. “오늘 배운 분수를 넣어서 네가 경험한 일 가운데 하나를 글로 써보렴. 분수라는 ‘표현’이 들어가야 해. 네 생활과 경험이 글에 나타나도록 글을 써보자.” 수학적 개념을 자신의 생활에서 자연스럽게 표현하도록 하는 겁니다. 이 또한 내가 배운 수학과 나의 생활을 연결 하는 것이지요. 수학은 이처럼 연결이 중요합니다. 오늘 배운 것과 예전에 배운 수학이 연결되고 오늘 배운 수학이 질문으로 문제해결까지 연결되고, 오늘 문제를 해결한 것이 내 생활과 연결된다면 자연스럽게 수학적 사고는 쑥쑥 자라나고 자라난 가지들은 더욱더 크게 뻗어갈 것입니다.

03. 학생들의 질문으로 만들어가는 수학 수업

질문과 이야기가 자연스럽게 오고가는 교실은 교사라면 누구나 꿈꾸는 모습일 겁니다. 수학도 질문과 이야기로 수업이 가능하다고 말씀드렸습니다. 처음에는 교사가 먼저 학생들에게 물어보는 것으로 시작할 수 있습니다. 학생들이 자신의 어떤 의견을 말할 수 있는 분위기가 형성되는 것도 중요하다고 말씀드렸습니다. 학생들은 분위기가 조금만 형성되어도 자신의 생각을 보여주기 시작합니다. 교사가 꼭 질문하지 않아도 자신의 궁금한 것들을 물어보기 시작하고 그 질문 하나가 수업을 살리기도 합니다.

6학년 비례식 단원에서 비례식의 성질에 대해 배웁니다. “외항의 곱은 내항의 곱과 같다.” 그럼 학생들은 성질을 외우고 거기에 맞게 문제를 풀어나가는 연습을 합니다. 이 당연하게 외우던 것을 질문으로 돌려주기 시작해 볼까요?

여기서 학생들의 뇌가 깨어나기 시작합니다. 늘 당연하게 생각했던 것을 질문 하나로 새롭게 볼 수 있게 도와주는 것입니다. 모둠끼리 서로 활발하게 의논하고 방법을 찾으면서 저절로 생각이 쑥쑥 자라납니다. 하지만 학생들의 대부분의 답은 비슷합니다. 교사용 지도서조차 제대

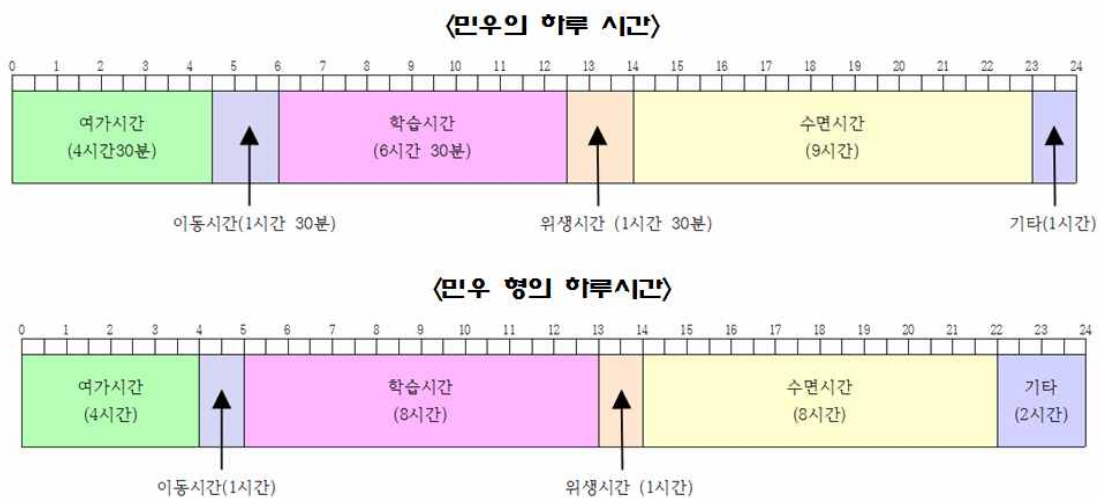
로 설명해주지 않습니다.

먼저 비례식에 대해 알아볼까요. 비례식은 비율이 같은 두비를 등호를 사용하여 나타낸 식을 말합니다. 예를 들어 3:4의 비율은 $3/4=0.75$ 이고 6:8의 비율은 $6/8=0.75$ 입니다. 그러므로 $3:4=6:8$ 로 나타낼 수 있습니다.

비례식 $a:b=c:d$ 에서 비율 a/b 는 c/d 와 같습니다. 각 비율의 양변에 분모 b 와 d 의 공배수 bd 를 곱하면 $a/b \times bd = c/d \times bd$, $ad=bc$ 입니다. 따라서 $a/b=c/d$ 에서 비례식의 성질 $ad=bc$ (외항의 곱은 내항의 곱과 같다.)를 쉽게 발견할 수 있습니다.

물론 이런 식의 설명은 교사용지도서와 거의 유사합니다. 교사가 원했던 다양한 아이디어와 방법으로 푸는 모습은 나오지 않습니다.

교사가 생각하는 너무나 아이디어 기발한 생각을 하기엔 우리 아이들은 이미 학원에서 너무 많은 것을 배웁니다. 답을 이미 알고 있고 빨리 답을 찾는 방법을 알고 있는 학생들의 입장에서 비슷한 문제를 주면서 왜 그렇게 푸는지 물어보면 어떻게 반응할까요? 네. 대부분은 이미 알고 있는데 왜 물어보느냐는 반응입니다. 빨리 풀어내고 답을 찾고 싶어합니다. 학생들이 수학을 단순히 문제를 풀고 답만 찾는 것이라고 생각해서겠지요. 이미 말씀드렸다시피 수학은 단순히 문제를 풀어내는 것만이 아니라 그 문제를 풀어내는 과정이 더 중요합니다. 풀어내는 과정도 단순히 공식을 대입해서 풀어내는 것이 아니라 그 공식을 왜 적용하는지 왜 그렇게 푸는지 생각하는 과정이 중요하지요. 그 과정에 조금이라도 흥미를 붙여넣는 것이 바로 질문의 힘입니다. 이렇게 질문 하나로 학생들의 생각들을 깨우기 시작하면 처음에 익숙하지 않아 하지만 조금씩 조금씩 학생들의 생각이 깨어납니다.



비율그래프 문제입니다. 항상 첫 번째 문제는 “그림을 보고 알 수 있는 것을 이야기해보시오.” 이죠. 학생들이 열심히 그래프를 볼까요? 학생들은 그래프를 싫어합니다. 그래프를 모르기 때문에 더 싫어하는 측면이 있어요. 그래프를 유심히 보고 자세히 들여다보면 그래프에 대해서 더 알게 되고, 더 알게 되면 또 그래프에 관심이 생겨나지 않겠습니까. 하지만 첫 번째 문항으로는 학생들의 흥미를 끌기에는 부족해보입니다. 이때 학생들에게 던진 질문 하나가 학생들의 열

의를 불태웠습니다. 어떤 질문일까요?

너무나 간단한 질문이었지만 이 질문 하나로 학생들이 열심히 그래프를 보고 분석하기 시작했습니다. 게다가 그래프 옆에 제시된 민우와 민우형의 그림을 참고한 재미있는 이론도 많았습니다. 어떤 이야기들이 나왔을까요?

1. 민우는 1학년, 민우형은 3학년이다.
2. 민우는 초등학교 2학년, 민우형은 중학생이다.
3. 6학년 교과서라서 민우는 일단 6학년이고 민우형은 키도 안크니 중학교 1학년이다.
4. 민우는 아직 불살이 많고 여가시간도 4시간 30분이어서 4학년 쯤 될 것이다.
5. 우리 모둠 친구들 평균 자는 시간이 7시간, 공부하는 시간이 9시간 정도 되니 6학년 쯤 될 것이다.
6. 민우가 3등신이어서 3학년, 민우 형은 4등신이라서 4학년이다.

여가시간을 기준으로 잡은 모둠도 있었구요. 모듬의 평균 자는 시간과 공부시간을 조사하여 비교한 모듬도 있었습니다. 그중 제일 논의가 활발했던 것은 바로 ‘민우가 3등신이어서 3학년, 민우 형은 4등신이라서 4학년이다.’라는 의견이었습니다. 물론 그 의견에 가만히 있지 않았겠죠. 그럼 유치원생은 어떻게 하느냐는 반박이 있었고 그 질문에 이 이론은 초등학교 3학년부터 적용된다는 센스 있는 대답으로 학생들로부터 박수를 받기도 했습니다. 학생들끼리 그래프를 분석하여 답을 찾아내보고 모듬의 이론을 전체 친구들 앞에서 발표하면서 질문과 대답이 이어지며 자연스럽게 전체 토론으로 넘어가게 됩니다. 단순히 그래프를 보고 알 수 있는 것을 찾아보는 것과 활발한 토론과 함께 분석하게 되는 차이는 바로 호기심을 불러일으키는 질문이었습니다.

학생들의 흥미를 높이고 생각을 깨우는 질문은 교사만 하는 걸까요? 아닙니다. 초기에 교사가 이런 질문들을 했다면 조금만 시간이 지나도 학생들도 자신의 의문점을 이야기하기 시작합니다. 아까의 비율그래프 같은 경우도 민우와 민우 형이 몇 학년일지 이야기를 끝내고 나자 민우와 민우형의 부모님이 어떤 분이실지 궁금해 했습니다. 왜냐하면 개인 위생시간이 민우는 1시간 20분, 민우 형은 1시간 45분이었거든요. 초등학교 남학생의 위생시간이라고 하기에는 좀 긴편 아닙니까. ‘목욕탕하신다’부터 ‘결벽증이 있다’는 의견까지 재밌는 이야기들이 오갔구요. 그리고 이동시간이 1시간이상인 것으로 보아 꽤 멀리 떨어진 학원으로 보내는 것이며 이는 ‘부모님이 자녀교육에 관심이 많아 학원을 멀리까지 보낸다.’라고 이야기하는 학생도 있었습니다. 물론 이에 반박하여 자유시간이 긴 편으로 자유롭게 키우시는 분이라는 이야기도 있었습니다.

질문과 이야기가 있는 수학수업은 거창한 것이 아닙니다. 어떤 생각이든지 말할 수 있는 안정적이면서 따뜻한 수업분위기 속에서 떠오른 질문 하나가 수업을 살리고 생각을 깨웁니다. 첫 시작이 교사일지라도 수업을 더 풍요롭게 마무리 하는 것은 결국 학생이 될 것입니다.